

算法基础

第一次作业 (DDL: 2024 年 9 月 18 日 23:59)

解答过程中请写出必要的计算和证明过程

Q1. (15 + 20 = 35 分) 化学学院的小明同学制备了一种新型材料, 并用该材料制成了两颗大小、形状、硬度完全相同的实心球。同时, 有一栋 $n = 128$ 层高的新理化大楼。现在需要确定它们的抗摔能力参数 x (它们从高度大于等于 x 层落下时会破碎, 而从高度小于等于 $x - 1$ 层落下时不会破碎)。假设 $x \in \{1, 2, \dots, 127, 128\}$, 且 x 的取值满足均匀分布。为此, 同实验室的小方设计了两种测定抗摔能力参数的方法:

- (伪二分法) 第一次试验在 $n/2 = 64$ 层进行, 若球破碎, 则从第 1 层开始逐层试验, 直至确定抗摔能力参数 x 。反之, 则在 $n/2 + n/4 = 96$ 层进行第二次试验, 若球破碎, 则从第 $n/2 + 1 = 65$ 层开始逐层试验, 直至确定抗摔能力参数 x 。反之, 则在 $n/2 + n/4 + n/8 = 112$ 层进行第三次试验, 以此类推。
- (改良法) 第一次试验在 $k = 16$ 层进行, 若球破碎, 则从第 1 层开始逐层试验, 直至确定抗摔能力参数 x 。反之, 则在 $k + (k - 1) = 31$ 层进行第二次试验, 若球破碎, 则从第 $k + 1 = 17$ 层开始逐层试验, 直至确定抗摔能力参数 x 。反之, 则在 $k + (k - 1) + (k - 2) = 45$ 层进行第三次试验, 以此类推。

函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 定义为, 当新型材料球的抗摔能力参数为 x 时, 分别采用伪二分法和改良法所需的试验次数 (例如, $f(17) = 18$, $g(17) = 3$)。请分别计算以上两种方法确定抗摔能力参数 x 所需要的期望试验次数 $E(f(x))$ 和 $E(g(x))$ 。

Q2. ($5 \times 2 = 10$ 分) 判断以下命题的正误。若正确, 请给出证明; 若错误, 请给出反例。

- 若 $f(n) = \Theta(g(n))$, 则有 $\lg(f(n)) = \Theta(\lg g(n))$ 。
- 若 $f(n) = \sum_i^l b_i n^i$, 且 $b_l > 0$, 则有 $f(n) = \Theta(n^l)$ 。

Q3. ($3 \times 5 = 15$ 分) 假设你有以下列出的五种运行时间的算法。(假设这些是作为输入大小 n 函数执行的确切操作次数。) 假设你有一台计算机, 每秒可以执行 10^{10} 次操作, 你需要在最多一个小时的计算时间内得到结果。对于每种算法, 你能在一小时内得到结果的最大输入大小 n 是多少?

1. n^4
2. $100n^2$
3. $n \log n$
4. 2^n
5. 2^{2^n}

Q4. (20 分) 将下列函数按照增长顺序排列。找出一个满足 $g_1 = O(g_2)$, $g_2 = O(g_3)$, $g_3 = O(g_4)$, $g_4 = O(g_5)$, $g_5 = O(g_6)$, $g_6 = O(g_7)$, $g_7 = O(g_8)$ 的函数排列 $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8$ 。

$$f_1(n) = n^\pi$$

$$f_2(n) = \pi^n$$

$$f_3(n) = \binom{n}{5}$$

$$f_4(n) = \sqrt{2\sqrt{n}}$$

$$f_5(n) = \binom{n}{n-4}$$

$$f_6(n) = 2^{\log^4 n}$$

$$f_7(n) = n^{5(\log n)^2}$$

$$f_8(n) = n^4 \binom{n}{4}$$

Q5. (5 + 15 = 20 分) 中秋佳节即将到来, 科大糕点厂决定给 n 个科大幼儿园的小朋友分发科大定制月饼。小朋友们排成一队依次领取, 从队头数起第 i ($1 \leq i \leq n$) 的小朋友有 a_i 朵小红花, 分到 c_i 枚月饼。同时, 为了奖励小红花多的小朋友, 幼儿园园长制定了以下分发规则:

- 每个小朋友至少分到 1 枚月饼 ($c_i \geq 1$);
 - 若小朋友的小红花数多于相邻的小朋友的小红花数, 则其分到的月饼数也多于相邻的小朋友 ($a_i > a_j$ ($1 \leq i, j \leq n, |i - j| = 1$) $\Rightarrow c_i > c_j$);
1. 若 $n = 5$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 2$, 请给出一个满足以上规则的月饼分配方案。

2. 现在 n, a_i 已知, 请设计满足以上规则的分发方案 (算法), 输出每个小朋友分到的月饼数 c_i , 同时使得 $\sum_{i=1}^n c_i$ 最小。给出该算法的伪代码。(不需要证明算法的最优性)