

## 算法基础

第三次作业 (DDL: 2024 年 10 月 10 日 23:59)

解答过程中请写出必要的计算和证明过程

**Q1.** (5 + 15 = 20 分)**(a)** 下面的排序算法中哪些是稳定的: 插入排序、冒泡排序、希尔排序、堆排序和快速排序?**(b)** 给出一个能使任何排序算法都稳定的方法。你所给出的方法带来的额外时间和空间开销是多少?**Q2.** (20 分) Quicksort 包含了两个对自身的递归调用:

```

1 Quicksort(A, p, r)
2   if p < r then
3       q = Partition(A, p, r)
4       Quicksort(A, p, q - 1)
5       Quicksort(A, q + 1, r)

```

其中第二个递归调用并非必须的。请修改 Quicksort, 使得 Quicksort 只包含一个递归调用。(提示: 使用一个循环结构来代替其中一个递归调用)

**Q3.** (20 分) 因为在基于比较的排序模型中, 完成  $n$  个元素的排序, 其最坏情况下需要  $\Omega(n \log n)$  时间。试证明: 任何基于比较的算法从  $n$  个元素的任意序列中构造一棵二叉搜索树, 其最坏情况下需要  $\Omega(n \log n)$  的时间。**Q4.** (20 分) 定义二叉搜索树  $T$  上节点的深度  $d(x)$  如下:

$$d(x) = \begin{cases} 1, & x = \text{root}(T) \\ d(p(x)) + 1, & \text{else} \end{cases}$$

试证明: 以随机的输入构建的二叉搜索树的平均节点深度的期望为  $\Theta(\log(n))$ **Q5.** (20 分) 在线地求数组中排名为  $k$  的数是二叉搜索树的应用之一。请修改二叉搜索树, 并以此实现  $\text{Querykth}(T, k)$ , 返回二叉搜索树  $T$  中第  $k$  大的数, 且时间复杂度为  $O(h)$ 。(提示: 你可能需要申请额外的空间, 以此维护更多的信息。)