

算法基础

第四次作业 (DDL: 2024 年 10 月 19 日 23:59)

解答过程中请写出必要的计算和证明过程

Q1. (10 + 10 = 20 分) 红黑树:

(a) 将关键字 41, 38, 31, 12, 19, 8 连续地插入一棵初始为空的红黑树之后, 请画出该结果树。

(b) 对于 (a) 中得到的红黑树, 依次删除 8, 12, 19, 31, 38, 41, 请画出每次删除操作后的红黑树。

Q2. (20 分) 在一棵黑高为 k 的红黑树中, 内部结点 (带关键字的结点) 最多可能有多少个? 最少可能有多少个? 说明理由。**Q3.** (15 + 15 = 30 分) 假设我们希望记录一个区间集合的**最大重叠点**, 即被最多数目区间所覆盖的那个点。

(a) 证明: 在最大重叠点中, 一定存在一个点是其中一个区间的端点。

(b) 设计一个数据结构, 使得它能够有效地支持 INTERVAL-INSERT、INTERVAL-DELETE, 以及返回最大重叠点的 FIND-POM 操作。

Q4. (15 + 15 = 30 分) 斐波那契堆删除操作的另一种实现:

Pisano 教授提出了下面的 FIB-HEAP-DELETE 过程的一个变种, 声称如果删除的结点不是由 $H.min$ 指向的结点, 那么该程序运行地更快。

(a) 该教授的声称是基于第 11 行可以在 $O(1)$ 实际时间完成的这一假设, 它的程序可以运行的更快。该假设有什么问题吗?

(b) 当 x 不是由 $H.min$ 指向时, 给出 PISANO-DELETE 实际时间的一个好 (紧凑) 上界。你给出的上界应该以 $x.degree$ 和调用 CASCADING-CUT 的次数 c 这两个参数来表示。

Algorithm 1: PISANO-DELETE(H, x)

Input : A Fibonacci heap H , a node x **Output:** Heap H after deleting node x

```
1 if  $x == H.min$  then
2   | FIB-HEAP-EXTRACT-MIN( $H$ );
3 end
4 else
5   |  $y \leftarrow x.p$ ;
6   | if  $y \neq NIL$  then
7     | Cut( $H, x, y$ );
8     | Cascading-Cut( $H, y$ );
9   | end
10  | Add  $x$ 's child list to the root list of  $H$ ;
11  | Remove  $x$  from the root list of  $H$ ;
12 end
```
