算法基础

第五次作业（DDL：2024 年 11 月 5 日 23:59）

解答过程中请写出必要的计算和证明过程

Q1.(20 分) 若正整数序列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足：

1. $a_1 = 1$;
2. $a_j \le \max\limits_{1\le i\le j-1} a_i + 1, \forall j \in [2, n]$,

我们称这个正整数序列具有限制增性质。

请设计一个多项式时间复杂度的动态规划算法，计算长度为 n 的正整数序列中满足限制增性质的序列数目。

简述算法过程，给出递归式，并简单分析算法复杂度。不需要说明算法正确性。

Q2.(20 分) 在 3-划分问题中，目标是将集合 S 划分成 3 个和相等的子集。

例如，

$S = \{7, 3, 2, 1, 5, 4, 8\}$

我们可以将集合 S 划分成 3 个子集，每个子集的和为 10。

$S_1 = \{7, 3\}$

$S_2 = \{5, 4, 1\}$

$S_3 = \{8, 2\}$

请设计一个 3-划分问题的动态规划算法, 简述算法过程，给出递归式，并简单分析算法复杂度。不需要说明算法正确性。

Q3. (30 分) 给定一个整数数组 $A[1:n]$, 找到一个具有最大和的连续子数组 (子数组最少包含一个元素), 比如数组 $[-1, 7, -2, 3]$ 的一个具有最大和的连续子数组为 $[7, -2, 3]$.

(a) 基于分治思想设计算法，并分析其时间复杂度（算法时间复杂度不得超过 $O(n \log n)$）。

(b) 用动态规划的方法在 $O(n)$ 时间内求解该问题, 根据你的思路列出你用到的边界条件和状态转移方程。

(c) 我们将一维的整数数组扩展到二维的矩阵, 试用动态规划的方法找到整数矩阵 M[1:m,1:n] 中具有最大和的子矩阵。简要说明你的算法并给出时间复杂度。

Q4. (30 分) 叠叠乐

(a) 在一次图书漂流活动中，小明需要将收集到的旧书叠起来以充分利用存

储室的空间。为了保证叠起来的书保持稳定，要求上层书的尺寸（长宽分别为 $p \times q$）必须严格小于下层书的尺寸（长宽分别为 $r \times s$），即 $p < r$ 且 $q < s$。此外，为了便于统计书名和书的数量，所有书的书脊必须朝向同一面（即书的长宽不能调换）。现在已知有 n 本旧书，它们的长宽分别为 $a_i \times b_i(1 \le i \le n，a_i > b_i)$，试设计最坏时间复杂度尽可能优的算法求这些书最多可能叠多少层。

(b) 积木同样可以堆叠。不过，积木的尺寸有三个维度，分别是长、宽、高。每块积木都能够以任意方向进行堆叠（即可以选择任意一面作为底面，底面的长宽也可以调换）。为了保持稳定，要求上层积木的底面（尺寸为 $p \times q$）必须严格小于下层积木的顶面（尺寸为 $r \times s$），即 $p < r$ 且 $q < s$，或 $p < s$ 且 $q < r$。现在已知有 n 种尺寸各异的积木（尺寸为 $a_i \times b_i \times c_i(1 \le i \le n)$），每种尺寸的积木至少有三块，试设计最坏时间复杂度为 $O(n^2)$ 的算法求这些积木最多可能叠多高。