

算法基础

第六次作业 (DDL: 2024 年 11 月 21 日 23:59)

解答过程中请写出必要的计算和证明过程

Q1.(20 分) 对于用最少的硬币找 n 美分零钱的问题, 假定有 25 美分、10 美分、5 美分、2 美分和 1 美分五种面额的硬币: 设计贪心算法求解找零问题, **给出算法思路**, 并证明你的**贪心算法的正确性**, 不必给出伪代码。

Q2.(25 分) 给定一个非负整数数组 $A[1:n]$, 每次可以选择一个满足:

$1 \leq l \leq r \leq n, \min(a_l, a_{l+1}, \dots, a_r) > 0$ 的区间 $[l, r]$ 进行一次操作, 使得 a_l, a_{l+1}, \dots, a_r 减 1。比如, $n = 5, A[1:5] = [1, 2, 3, 4, 5]$, 先后选择 $[1, 5], [2, 4]$ 执行操作后, A 数组变成 $[0, 0, 1, 2, 4]$ 。下一次操作便不可以选择 $l = 1, 2$ 。

问最少需要多少次操作, 使得 A 数组变为全 0 数组。请设计一个时间复杂度 $O(n)$ 的算法求解该问题, **给出伪代码和算法思路、复杂度说明**, 并**证明算法的正确性**。

Q3. (30 分) 有一本词典, 其中有 n 种单词, 各个单词的出现次数分别为 a_1, a_2, \dots, a_n 。请推广赫夫曼编码到 k 位, 使之能生成 k 进制的码字, 并用其将词典中的每个单词替换为一个互不为前缀的 k 进制串, 使得替换后的词典总长度最小, 输出替换后的最小词典总长度 (词典总长度定义为 $\sum_{i=1}^n a_i s_i$, s_i 是最终分配给 a_i 的编码长度)。**给出伪代码和算法思路**, 不必证明算法的正确性。

Q4. (25 分)

1. 假定我们对一个数据结构执行一个由 n 个操作组成的操作序列, 当 i 严格为 2 的幂时, 第 i 个操作的代价为 i , 否则代价为 1。使用聚合分析确定每个操作的摊还代价。

2. 用核算法重做第一题。

3. 使用势能法重做第一题。